Licence 2 : Sciences et technologie

Topologie et calcul différentiel dans $\mathbb{R}^n$

Exercice 1

Démontrer que les applications $d(u, v) = \dfrac{|u-v|}{1+|u-v|}$ et $\delta(x, y) = \left|\dfrac{x}{1+|x|} - \dfrac{y}{1+|y|}\right|$ définissent chacune une distance sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose

$$N(x, y) = \sqrt{\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4}}.$$

1. Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer, en utilisant la définition de norme équivalente, que N est équivalente à la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3

Soit $p > 1$. Pour $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose $\|x\|_p = \left(\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$.

Le but de cet exercice est de montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

1. Montrer que
$$\forall s \in [0, +\infty[, \;\; \forall t \in [0, +\infty[, \quad st \leqslant \frac{1}{p}s^p + \frac{1}{q}t^q,$$
où q est défini par $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
On pourra fixer t et étudier la fonction $s \mapsto st - \frac{1}{p}s^p + \frac{1}{q}t^q$.
2. Soit $x = (x_1, ..., x_n)$ et $y = (y_1, ..., y_n)$. On note $\alpha = \|x\|_p$ et $\beta = \|y\|_q$.
Montrer que pour tout $i \in \{1, ..., n\}$ on a
$$\frac{|x_i y_i|}{\alpha\beta} \leqslant \frac{|x_i|^p}{p\alpha^p} + \frac{|y_i|^q}{q\beta^q}$$
et en déduire l'inégalité de Hölder
$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leqslant \|x\|_p \|y\|_q.$$
3. En écrivant que
$$|x_i + y_i|^p \leqslant |x_i + y_i|^{p-1}|x_i| + |x_i + y_i|^{p-1}|y_i|.$$
4. Montrer que $\|\cdot\|_p$ vérifie l'inégalité triangulaire.
5. Montrer que $\|\cdot\|_p$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 4
Pour tout $(x_1,\, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on pose

$$N(x) = \sqrt{x_1^2 + 2x_1x_2 + 5x_2^2}.$$

Montrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5
Dans l'espace vectoriel normé $\mathbb{R}$, déterminer :

1. si les parties suivantes sont des ouverts ou des fermés.

$$\mathbb{N}, \quad \mathbb{Z}, \quad [0,\, 2[, \quad]0,\, 1[\cup\{2\}, \quad \left\{\frac{1}{n},\, n \in \mathbb{N}^\star\right\},\ \bigcap_{n\in\mathbb{N}^\star} \left]-\frac{1}{n},\, \frac{1}{n}\right[;$$

2. l'intérieur et l'adhérence de $\mathbb{Q}$.

Exercice 6
Déterminer si les ensembles suivants sont des ouverts ou des fermés de $\mathbb{R}^2$.

1. $A = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 < |x-1| < 1\}$
2. $B = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \leqslant x \leqslant y\}$
3. $C = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, |x| < 1,\ |y| \leqslant 1\}$
4. $D = \{(x,\, y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \in \mathbb{Q}\ ,\ y \in \mathbb{Q}\}$

Exercice 7
Soient A et B deux parties d'un espace métrique $(E,\, d)$.

1. On suppose $A \subset B$. Démontrer que $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ et $\overline{A} \subset \overline{B}$.
2. Démontrer que $(A \cap B)^\circ = \mathring{A} \cap \mathring{B}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B} \subset (A \cup B)^\circ$, mais que l'inclusion peut être stricte.
3. Comparer $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$, puis $\overline{A \cup B}$ et $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Exercice 8
Soit A et B deux parties d'un espace métrique. On suppose que A est ouverte et que $A \cap B = \emptyset$. Démontrer que $A \cap \overline{B} = \emptyset$.

Exercice 9
Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si A est majorée alors $\sup(A)$ appartient à $\overline{A}$.
2. Montrer que si A est minorée alors $\inf(A)$ appartient à $\overline{A}$.